FICHE PÉDAGOGIQUE n°05

Méthodes simplifiées du calcul de la parallaxe

Exemples

P. Rocher (IMCCE) PR08 lundi 26 avril 2004

I.Introduction

Dans cette fiche nous allons présenter un calcul simplifié de la parallaxe équatoriale moyenne du Soleil. Cette simplification du calcul se fait au prix d'une contrainte importante pour les observations. Cette contrainte est la simultanéité des observations. Nous allons supposer que nous avons deux observations simultanées qui nous fournissent la distance entre les deux centres apparents de la planète Vénus devant le disque solaire. Nous indiquerons les approximations et simplifications que nous effectuons.

Nous donnerons également deux exemples d'utilisation des formules simplifiées de la méthode de Delisle et de Halley permettant de calculer une première approximation de la parallaxe équatoriale moyenne de Soleil.

II Hypothèses

Soient deux lieux d'observations M_1 et M_2, suffisamment éloignés ; deux observateurs notent au même instant *t* la position du centre apparent de la planète Vénus devant le disque solaire, puis à l'aide de ces deux observations, ils déterminent la distance qui joint ces deux centres apparents de Vénus. La mesure de cette distance exprimée en rayon solaire, permet de calculer la parallaxe moyenne équatoriale du Soleil π_0. Nous verrons que cette mesure est loin d'être simple.

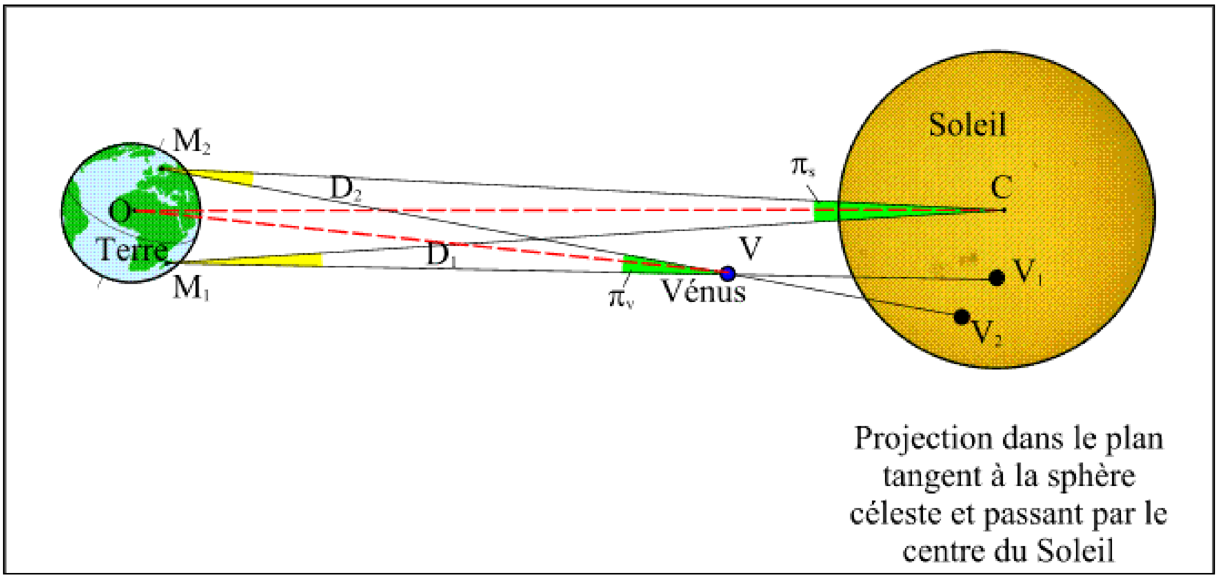

FIGURE 1. – *Observation du passage de Vénus depuis deux lieux au même instant.*

Soient O le centre de la Terre, C le centre du Soleil, V le centre de Vénus et V_1 et V_2 les centres de Vénus sur le disque solaire vus respectivement depuis les points M_1 et M_2. Notons D_1 et D_2 les angles CM_1V et CM_2V formés par les directions des droites joignant les deux points d'observations aux centres de Vénus et du Soleil et notons π_s l'angle sous lequel on voit le segment M_1M_2 depuis le Soleil et π_v l'angle sous lequel on voit le segment M_1M_2 depuis Vénus. Ces deux angles sont les parallaxes du Soleil et de Vénus vues depuis les lieux M_1 et M_2 (figure 1).

Si les deux points M_1 et M_2 sont quelconques sur la surface terrestre dans la zone de visibilité du passage, il n'y a aucune raison pour que les quatre points M_1, M_2, V et C soient dans un même plan. Donc les droites M_1C et M_2V ne sont pas dans le même plan et ne se coupent pas. On ne peut donc pas appliquer les règles de la géométrie plane dans la figure1.

Et la relation suivante :

$$D_1 - D_2 = \pi_s - \pi_v$$

est fausse. Elle n'est vraie que lorsque les quatre points sont coplanaires.

Par contre la différence des parallaxes est égale à la distance angulaire entre les deux centres apparents de Vénus (figure 2).

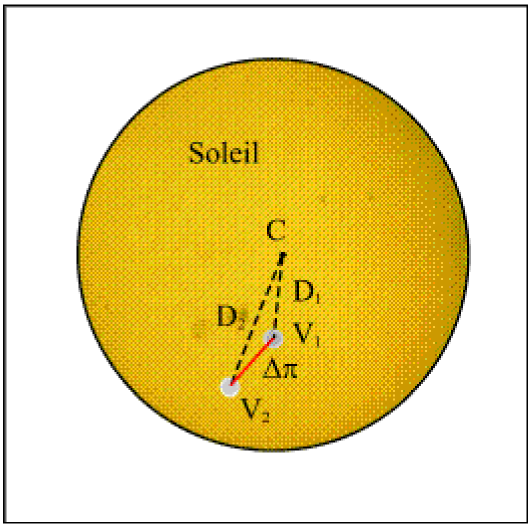

FIGURE 2. – *Positions apparentes de Vénus sur le disque solaire.*

On vérifie bien que cette différence est égale à $D_2 - D_1$ lorsque les quatre points sont coplanaires c'est-à-dire lorsque V_1, V_2 et C sont alignés.

La valeur que les observateurs vont mesurer est donc la distance $\Delta\pi$ entre les centres apparents de Vénus et c'est la relation $\Delta\pi = \pi_v - \pi_s$ qui va nous permettre de calculer les parallaxes.

Pour cela nous allons exprimer les deux parallaxes en fonction des distances entre le centre de la Terre et le centre des deux astres. Soient r_V la distance entre le centre du Soleil et le centre de Vénus et r_T la distance entre le centre de la Terre et le centre du Soleil, la distance Vénus-Terre est donc égale à $r_T - r_V$. Pour exprimer cette parallaxe nous devons également connaître la projection d de la distance entre les deux points M_1 M_2 sur le plan normal à la direction Terre Soleil (figure 3).

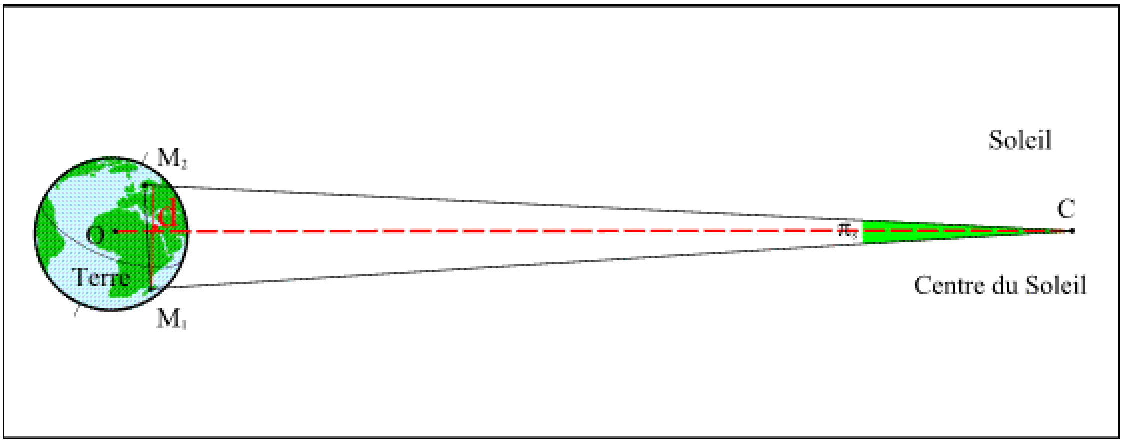

FIGURE 3. – *Parallaxe solaire relative aux points M_1 et M_2.*

Comme le rayon terrestre et la distance entre les deux points sont petits par rapport aux distances Terre-Soleil et Terre-Vénus, les parallaxes sont données par les formules approchées suivantes :

$$\boxed{\pi_s = \frac{d}{r_T} \quad \text{et} \quad \pi_v = \frac{d}{r_T - r_V}} \qquad (1)$$

En réalité les parallaxes exactes sont données par :

$$\cos\pi_s = \frac{\overrightarrow{CM_1} \cdot \overrightarrow{CM_2}}{\|CM_1\|\|CM_2\|}$$

$$\cos\pi_v = \frac{\overrightarrow{VM_1} \cdot \overrightarrow{VM_2}}{\|VM_1\|\|VM_2\|}$$

On a donc la relation suivante :

$$\pi_v = \pi_s \frac{r_T}{r_T - r_V} \qquad (2)$$

Et

$$\Delta\pi = \pi_v - \pi_s = \pi_s \frac{r_T}{r_T - r_V} - \pi_s = \pi_s \left(\frac{r_T}{r_T - r_V} - 1 \right) = \pi_s \frac{r_V}{r_T - r_V}$$

ou encore

$$\boxed{\pi_s = \Delta\pi \left(\frac{r_T}{r_V} - 1 \right)} \qquad (3)$$

La mesure nous donne la valeur Δπ exprimée en diamètre solaire, on doit également mesurer le diamètre du Soleil, car si la distance Terre-Soleil est inconnue on ne peut pas la calculer. Pour connaître la parallaxe solaire, il faut donc également connaître le rapport des distances Soleil-Terre et Soleil-Vénus. Or ce rapport peut être calculé grâce aux lois de Kepler.

III. Le calcul du rapport des distances au Soleil à l'aide des lois de Kepler

La première loi de Kepler nous dit que les planètes décrivent des orbites elliptiques autour du Soleil et que le Soleil occupe un des foyers de ces ellipses. A un instant donné le rayon vecteur r_p joignant le centre du Soleil à une planète p se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{r_p = a_p\left(1 - e_p \cos E\right)} \qquad (4)$$

Où a_p est le demi-grand axe de l'ellipse, e_p est l'excentricité de l'ellipse et E est un angle appelé anomalie excentrique qui permet de placer la planète sur son orbite.

La troisième loi de Kepler fournit une relation entre les demi-grands axes des orbites et les périodes de révolution des planètes ; ainsi pour un même corps central toutes les orbites des planètes qui gravitent autour de ce corps central vérifient la relation suivante :

$$\boxed{\frac{a_p^3}{T_p^2} = const} \qquad (5)$$

Les lois de Kepler décrivent donc les orbites du système solaire à un facteur d'échelle près. L'observation des périodes de révolution des planètes nous donne les rapports des demi-grands axes, ainsi le rapport des demi-grands axes des orbites de Vénus et de la Terre est égal à :

$$\boxed{\frac{a_T}{a_V} = \sqrt[3]{\frac{T_T^2}{T_V^2}}} \qquad (6)$$

et à un instant t quelconque le rapport des rayons vecteurs est égal à

$$\frac{r_T}{r_V} = \frac{a_T\left(1 - e_T \cos E_T\right)}{a_V\left(1 - e_V \cos E_V\right)} = \sqrt[3]{\frac{T_T^2}{T_V^2}}\,\frac{\left(1 - e_T \cos E_T\right)}{\left(1 - e_V \cos E_V\right)} \qquad (7)$$

Donc les lois de Kepler permettent de calculer le rapport des rayons vecteurs pour un instant t quelconque.

Notre mesure nous permet de calculer la valeur $\pi_{s,}$ il convient donc maintenant de passer de cette valeur à la valeur de la parallaxe équatoriale moyenne du Soleil π_0 .

IV. Calcul de la parallaxe moyenne du Soleil

La parallaxe équatoriale moyenne du Soleil π_0 est par définition l'angle sous lequel on voit le rayon équatorial de la Terre depuis le centre du Soleil lorsque le Soleil se trouve à une unité astronomique de la Terre.

On a donc la relation suivante :

$$\boxed{\sin \pi_0 = \frac{R}{a} \quad \text{ou} \quad \pi_0 \approx \frac{R}{a}} \qquad (8)$$

R étant le rayon équatorial terrestre et a l'unité astronomique.

L'équation (1) nous donne la valeur de la parallaxe solaire π_s en fonction de la distance r_T Terre-Soleil et de la projection d de la distance entre les points d'observations sur le plan normal à la direction Terre-Soleil.

Il suffit d'exprimer cette distance d en rayon terrestre et la distance Terre-Soleil en unité astronomique pour avoir une relation entre π_s et π_0.

$$\boxed{\pi_s = \frac{d}{r_T} = \frac{d}{R}\frac{R}{a}\frac{a}{r_T} = \frac{d}{R}\frac{a}{r_T}\pi_0} \qquad (9)$$

Il ne reste plus qu'à calculer le rapport d sur R. Le rapport a/r_T nous est fourni par la première loi de Kepler (cf. formule 4). Si l'on fait le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{OC}$ on obtient :

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{OC} = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\| \sin\theta \qquad (10)$$

Or le produit de la longueur du premier vecteur par le sinus de l'angle entre les deux vecteurs $\left\|M_1M_2\right\|\sin\theta$ est égal à la distance d. De même la longueur de $\overrightarrow{OC}$ est égale à la distance r_T (figure 4).

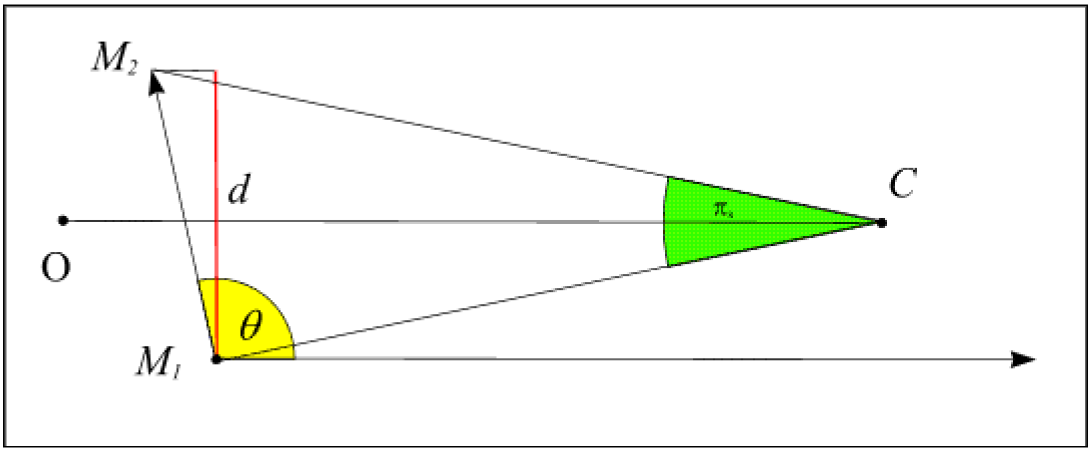

FIGURE 4. – *Parallaxe solaire relative aux points M_1 et M_2.*

La résolution de l'équation (10) nous donne la valeur de d.

$$\boxed{d = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|\sin\theta = \frac{\left\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{OC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|}} \qquad (11)$$

Remarque : si la notion de produit vectoriel n'est pas connue, on peut utiliser le produit scalaire des mêmes vecteurs, cela permet de calculer le cosinus de l'angle, puis son sinus par la relation : $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$.

Description de ce calcul

Ce calcul sur les vecteurs demande de connaître les coordonnées cartésiennes des deux points M_1 et M_2 et du centre du Soleil C dans un repère orthonormé (O, x, y, z) centré au centre de la Terre. Nous allons utiliser le repère équatorial apparent géocentrique pour ce calcul.

Ce repère est défini par le plan de l'équateur terrestre à l'instant t de l'observation (plan Oxy) et par la direction du pôle céleste nord de l'axe de rotation de la Terre (Oz). Dans ce repère on peut définir un système de coordonnées cartésiennes (*x, y, z*) et un système de coordonnées polaires (α, δ, r) les deux angles portent le nom d'ascension droite et de déclinaison (figure 5). On passe d'un système à l'autre par les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\delta\cos\alpha \\ y &= r\cos\delta\sin\alpha \\ z &= r\sin\delta \end{aligned}} \qquad (12)$$

et les relations inverses

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \\ \delta &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}} \qquad (13)$$

La direction de l'axe *Ox* à l'instant *t* est la direction de l'équinoxe de printemps au même instant.

Les éphémérides (c'est-à-dire les lois de Kepler) nous donnent les coordonnées équatoriales géocentriques du centre du Soleil (α, δ) la distance n'est pas connue mais cela n'a pas d'importance car on peut remplacer le vecteur $\overrightarrow{OC}$ par son vecteur unitaire dans l'équation 11.

Le problème le plus complexe est la détermination des coordonnées cartésiennes des points M_1 et M_2 dans ce repère équatorial.

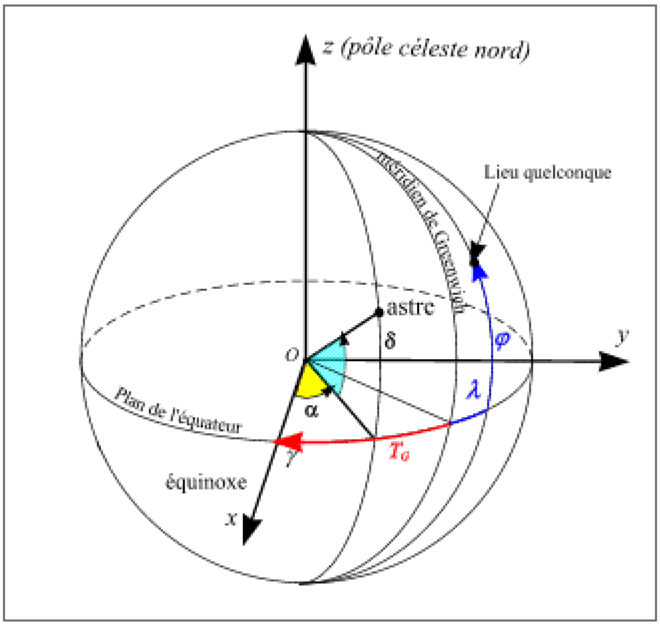

FIGURE 5. – Coordonnées équatoriales géocentriques.

Les positions d'un point de la surface terrestre sont données par sa latitude et sa longitude géographique, la latitude est donnée par rapport à l'équateur terrestre c'est donc une variable angulaire identique à la déclinaison, la longitude est donnée par rapport à un méridien origine (méridien de Greenwich) c'est donc une variable angulaire identique à l'ascension droite, mais qui a une origine différente de celle des coordonnées équatoriales célestes. Il convient donc de connaître à chaque instant l'angle entre la direction de l'axe *Ox* et la direction de la projection du méridien origine dans le plan de l'équateur (cf. figure 5). Cet angle est lié à la rotation de la Terre sur elle-même, il porte le nom de temps sidéral au méridien de Greenwich et il varie de 360° en 23h 56m 4s (révolution sidérale de la Terre).

Il suffit donc de connaître le temps sidéral à Greenwich T_G à 0h UT le jour du passage pour connaître le temps sidéral à Greenwich à l'instant *t* puis le temps sidéral en tout point de la Terre de longitude λ.

$$T_G(t\ \text{UTC}) = T_G(0\text{h UTC}) + \frac{360°}{23\text{h}56\text{m}4\text{s}}t \qquad (14)$$

On passe du temps sidéral à Greenwich au temps sidéral au lieu M de longitude λ en ajoutant ou en retranchant cette longitude.

Attention, le temps sidéral augmente lorsque l'on s'éloigne vers l'est du méridien de Greenwich, il convient donc de bien faire attention à la convention de signe utilisée pour noter les longitudes.

Si **les longitudes sont comptées négativement vers l'est** alors la relation liant le temps sidéral local au méridien du lieu de longitude λ et le temps sidéral au méridien de Greenwich est la suivante :

$$\boxed{T_\lambda = T_G - \lambda} \qquad (15)$$

Attention, les deux angles doivent être exprimés avec la même unité (degrés ou heures).

Alors les coordonnées cartésiennes d'un point M_1 de coordonnées géographiques (φ_1, λ_1) à l'instant *t* sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi_1 \cos\left(T_{\lambda_1}\right) \\ y_1 &= R\cos\varphi_1 \sin\left(T_{\lambda_1}\right) \\ z_1 &= R\sin\varphi_1 \end{aligned}} \qquad (16)$$

La longueur $\|M_1M_2\|$ du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ (son module) et ses coordonnées (*X*, *Y*, *Z*) sont donnés par :

$$\begin{aligned} X &= x_2 - x_1 \\ Y &= y_2 - y_1 \\ Z &= z_2 - z_1 \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \\ \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \end{aligned} \qquad (17)$$

Le vecteur unitaire $\vec{c}$ de la direction « centre de la Terre-Soleil » est donné par :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos\delta_s \cos\alpha_s \\ y &= \cos\delta_s \sin\alpha_s \\ z &= \sin\delta_s \end{aligned}} \qquad (18)$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{c}$ et son module sont alors :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{c} = (Yz - Zy)\vec{i} + (Zx - Xz)\vec{j} + (Xy - Yx)\vec{k} \\ &\left\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{c}\right\| = \sqrt{(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2} \end{aligned} \qquad (19)$$

et finalement en utilisant la formule 11, on obtient :

$$\boxed{d = \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| \sin\theta = \left\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{c}\right\| = \sqrt{(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2}} \qquad (20)$$

Et la parallaxe équatoriale moyenne π_0 est donnée par d'après (9) :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{R}{d}\frac{r_T}{a}\pi_s} \qquad (21)$$

V. Application numérique

Nous allons prendre pour exemple l'observation Antananarivo (Madagascar) et à Helsinki (Finlande) à l'instant t=8h 30min le 8 juin 2004.

Les coordonnées géographiques de Antananarivo sont les suivantes :

Latitude :18° 52' sud, longitude : 47° 30' est donc $\varphi_1 = -18{,}866667°$ et $\lambda_1 = -47{,}5°$.

Les coordonnées géographiques d'Helsinki sont les suivantes :

Latitude :60° 8' nord, longitude : 25° 3' est donc $\varphi_2 = 60{,}133333°$ et $\lambda_2 = -25{,}05°$.

Les coordonnées équatoriales géocentriques du Soleil à 8h 30m UTC sont données par les éphémérides :

Ascension droite du Soleil α_s = 76°49' 36.493"

Déclinaison du Soleil δ_s = +22°53' 16.237"

Le temps sidéral à Greenwich à un instant t en UTC est donné par la formule suivante :

$$T_G\,(t\ \text{UTC}) = 17\text{h}\ 6\text{m}\ 51{,}31\text{s} + 1{,}002737908\ t$$

Donc le temps sidéral à Greenwich à 8h 30min est égal à :

T_G = 17h 6m 51,31s + 8h 31m 23,78s = 25h 38m 15,09s = 1h 38m 15,09s

Il convient de le convertir en degrés avant de l'utiliser pour calculer le temps sidéral local au deux lieux considérés.

T_G = 1h 38m 15,09s = 24,562875°.

D'où on déduit le temps sidéral local à 8h 30m à Antananarivo :

$T\lambda_1 = 24{,}562875 - (-47{,}5°) = 72{,}062875°$

Et le temps sidéral local à 8h 30m à Helsinki :

$T\lambda_2 = 24{,}562875 - (-25{,}05°) = 49{,}612875°$

On en déduit les coordonnées cartésiennes équatoriales des deux villes :

Antananarivo :

$$x_1 = R\cos\varphi_1 \cos\left(T_{\lambda_1}\right) = 0,291427R$$
$$y_1 = R\cos\varphi_1 \sin\left(T_{\lambda_1}\right) = 0,900280R$$
$$z_1 = R\sin\varphi_1 = -0,323367R$$

Helsinki :

$$x_2 = R\cos\varphi_2 \cos\left(T_{\lambda_2}\right) = 0,322668R$$
$$y_2 = R\cos\varphi_2 \sin\left(T_{\lambda_2}\right) = 0,379306R$$
$$z_2 = R\sin\varphi_2 = 0,867187R$$

Les coordonnées du vecteur unitaire $\vec{c}$ de la direction Terre-Soleil sont obtenues à l'aide de la formule (18) :

$$x = \cos\delta_s \cos\alpha_s = 0,209953$$
$$y = \cos\delta_s \sin\alpha_s = 0,897025$$
$$z = \sin\delta_s = 0,388928$$

Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour coordonnées :

$$X = 0,031241R$$
$$Y = -0,520974R$$
$$Z = 1,190554R$$

La formule (20) nous permet de calculer la valeur de d :

$$d = \sqrt{\left(Yz - Zy\right)^2 + \left(Zx - Xz\right)^2 + \left(Xy - Yx\right)^2}$$
$$d = 1,299924R$$

Les éphémérides nous donnent les rapports des rayons vecteurs ainsi que le rapport de la distance Terre-Soleil sur le demi-grand axe de l'orbite terrestre à l'instant considéré :

$$\frac{r_T}{r_V} = 1,397795 \quad \text{et} \quad \frac{r_T}{a} = 1,015087$$

Il ne reste plus qu'à faire une hypothèse sur les valeurs mesurées, c'est-à-dire sur $\Delta\pi$ et sur le diamètre solaire :

Nous allons faire les hypothèses suivantes :

$$\Delta\pi = 0,015\phi \quad \text{et} \quad \phi = 31,51'$$

Ce qui donne pour valeur de $\Delta\pi$: 28,359"

La formule 3 nous donne la valeur de la parallaxe solaire :

$$\pi_s = \Delta\pi\left(\frac{r_T}{r_V} - 1\right) = 11,281''$$

Et la formule (21) nous donne la valeur de la parallaxe équatoriale moyenne :

$$\boxed{\pi_0 = \frac{R}{d}\frac{r_T}{a}\pi_s = 8{,}809''}$$

La valeur que l'on trouve est relativement proche de la réalité, mais elle repose uniquement sur la mesure de la distance des centres apparents de Vénus sur le disque solaire et la grandeur du diamètre solaire. La taille apparente du diamètre solaire peut être mesurée avec une bonne précision, par contre la mesure de la distance entre les centres apparents de Vénus n'est pas évidente, sur un cliché photographique classique, le diamètre apparent est de l'ordre 20mm, la distance des centres est alors de 0,3mm et une précision de l'ordre du millième correspond à une mesure à 0,02mm près. On remarque également que la valeur $\Delta\pi$: 28,359" est inférieure au rayon apparent (28,884") de Vénus. Les deux disques apparents de Vénus sont donc partiellement superposés.

Dans les formulaires précédents on a occulté un certain nombre de difficultés pour simplifier le problème. Voici la liste des complications qui apparaissent si l'on veut faire un calcul rigoureux :

1. En raison des perturbations mutuelles, les orbites des planètes ne suivent pas les lois de Kepler (valables uniquement pour deux corps) mais des trajectoires plus complexes.
2. Ce n'est pas la Terre qui a une orbite quasi-elliptique autour du Soleil mais le barycentre du système Terre-Lune.
3. Suite au mouvement de l'axe de rotation de la Terre (précession et nutation), l'origine *Ox* du repère équatorial n'est pas fixe dans le temps.
4. La lumière se propageant avec une vitesse finie, les positions du Soleil et de Vénus à un instant t ne sont pas des positions géométriques, mais celles des deux corps au instants $t - \tau_p$, τ_p représentant le temps mis par la lumière pour parcourir la distance entre chaque corps et la Terre. Comme ces distances ne sont pas supposées connues, il convient de réitérer les calculs pour en tenir compte.
5. Nous avons supposé la Terre comme sphérique, en réalité elle est aplatie.

VI Calcul de la parallaxe à partir des instants des contacts ou de la durée du passage.

Nous avons vu dans la fiche n°04b, qu'il existe deux formules simplifiées qui permettent un calcul direct de la parallaxe à partir de la comparaison des instants d'un même contact en deux lieux distincts (méthode de Delisle) ou à partir de la comparaison de la durée des passages en deux lieux distincts (méthode de Halley).

Nous allons traiter simultanément ces deux aspects à partir de l'exemple numérique précédent.

La parallaxe équatoriale moyenne solaire π_0 s'obtient en comparant deux contacts identiques à l'aide de la formule simplifiée suivante (cf. formule 16 de la fiche n°04b) :

$$\begin{bmatrix} A(\cos\varphi_1\cos\lambda_1 - \cos\varphi_2\cos\lambda_2) + \\ B(\cos\varphi_1\sin\lambda_1 - \cos\varphi_2\sin\lambda_2) + \\ C(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \end{bmatrix}\pi_0 \qquad (22)$$

$$+\frac{dD}{dt}(t_{1,o} - t_{2,o}) \pm \frac{dD}{dt}\Delta t_2 \pm \frac{dD}{dt}\Delta t_1 + \frac{dD}{dt}(\delta\lambda_1 - \delta\lambda_2) = 0$$

Si l'on néglige les incertitudes et les erreurs alors cette formule devient :

$$\begin{bmatrix} A(\cos\varphi_1\cos\lambda_1 - \cos\varphi_2\cos\lambda_2) + \\ B(\cos\varphi_1\sin\lambda_1 - \cos\varphi_2\sin\lambda_2) + \\ C(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \end{bmatrix}\pi_0 = -\frac{dD}{dt}(t_{1,o} - t_{2,o}) \qquad (23)$$

De même la parallaxe équatoriale moyenne solaire s'obtient en comparant deux durées identiques à l'aide de la formule suivante (cf. formule 21 de la fiche n°04b) :

$$\begin{bmatrix} (A_i + A_j)(\cos\varphi_1\cos\lambda_1 - \cos\varphi_2\cos\lambda_2) + \\ (B_i + B_j)(\cos\varphi_1\sin\lambda_1 - \cos\varphi_2\sin\lambda_2) + \\ (C_i + C_j)(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \end{bmatrix}\pi_0 = -\frac{dD}{dt}(DT_o) \qquad (24)$$

i et j sont des indices liés aux mêmes contacts : $i = 1, j = 4$ pour les contacts extérieurs et $i = 2$, $j = 3$ pour les contacts intérieurs.

Les coefficients A, B, C et le terme $\frac{dD}{dt}$ sont calculés pour chaque contact et sont donnés par le tableau suivant :

Description du contact	A	B	C	dD/dt "/min
Premier contact extérieur (indice 1)	2,2606	-0,0194	1,0110	-3,0846
Premier contact intérieur (indice 2)	2,1970	0,2237	1,1206	-2,9394
Dernier contact intérieur (indice 3)	-1,0929	-1,1376	1,9090	2,9391
Dernier contact extérieur (indice 4)	-0,9799	-1,3390	1,8383	3,0842

VII. Exemples numériques

Nous allons reprendre l'exemple des deux villes précédentes avec les hypothèses d'observations suivantes :

Ville n°1 : Antananarivo ($\varphi_1 = -18,866667°$ et $\lambda_1 = -47,5°$)

Instant du premier contact intérieur observé (indice 2) : t2 = 5h 35m 30s UTC.
Instant du dernier contact intérieur observé (indice 3) :t3 = 11h 8m 4s UTC
Durée du passage intérieur observée: 5h 32m 34s.

Ville n°2 : Helsinki ($\varphi_2 = 60,133333°$ et $\lambda_2 = -25,05°$)

Instant du premier contact intérieur observé (indice 2) : t2 = 5h 38m 38s UTC.
Instant du dernier contact intérieur observé (indice 3)° :t3 = 11h 2m 20s UTC
Durée du passage intérieur observée : 5h 23m 42s.

Dans les formules (22) et (23) les facteurs des coefficients A, B, C sont identiques et peuvent être calculés séparément :

$$(\cos\varphi_1 \cos\lambda_1 - \cos\varphi_2 \cos\lambda_2) = 0,18815$$
$$(\cos\varphi_1 \sin\lambda_1 - \cos\varphi_2 \sin\lambda_2) = -0,486815$$
$$(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) = -1,190553$$

Calcul de la parallaxe à l'aide des premiers contacts :

L'écart des temps des premiers contacts intérieurs est de –3m 8s (–3,1333m), et l'usage des valeurs des coefficients A_2, B_2, C_2 et $\frac{dD}{dt}$ dans la formule (22) nous donnent la relation suivante :

$$-1,029667\pi_0 = 2,9394''/\min\times(-3,1333\min)$$

Ce qui donne $\pi_0 = 8,945''$.

Calcul de la parallaxe à l'aide des durées des passages intérieurs :

L'écart de durée des passages intérieurs est de 8m 52s (8,866m), et l'usage des valeurs des coefficients A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 et $\frac{dD}{dt}$ dans la formule (23) nous donnent la relation suivante :

$$-2,95426\pi_0 = -2,9391''/\min\times(8,866\min)$$

Attention, c'est la valeur $\left(\frac{dD}{dt}\right)_3 \approx -\left(\frac{dD}{dt}\right)_2$ et surtout son signe qui doit être utilisée.

Ce qui donne $\pi_0 = 8,822''$.

On rappelle que ces méthodes ne sont pas exactes, et que l'on doit utiliser des formules plus complexes pour réduire les observations.